



Kangourou della Matematica 2022

Coppa Ecolier a squadre

Finale 1

Cervia, 3 maggio 2022



Quesiti

1. Pagine mancanti

In un libro mancano molte pagine consecutive: la prima pagina che manca è la 231, l'ultima è quella che si scrive con le stesse cifre, ma ognuna in un posto diverso. Quante pagine mancano nel libro?

2. Quante somme!

Considerate tutti i numeri interi da 1 a 2022 inclusi e tutte le possibili somme di due diversi di essi. Quanti sono i valori tutti diversi fra loro che ottenete facendo queste somme?

3. Il libro

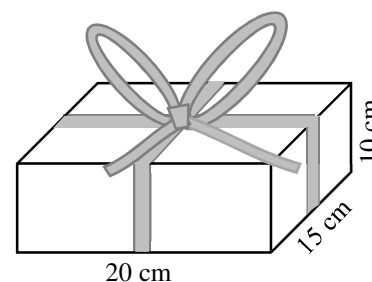
Un libro di Matematica è diviso in due parti: teoria ed esercizi. Per distinguerle, i bordi delle pagine della parte di teoria sono colorati di rosso: lo spessore totale delle pagine col bordo rosso è di 5 mm. Le pagine di teoria sono numerate da 1 a 70. Per numerare le pagine di tutto il libro sono state necessarie 1152 cifre. Quanti millimetri è spesso l'intero libro?

4. Numeri speciali di tre cifre

Quanti numeri interi di tre cifre (non necessariamente distinte) sono tali che la somma delle prime due cifre (quella delle centinaia e quella delle decine) è uguale alla terza cifra (quella delle unità)?

5. Il regalo

In figura vedete un pacco regalo legato con un nastro. La scatola ha la forma di un parallelepipedo rettangolo (tipo "scatola da scarpe") di cui sono evidenziate le misure in centimetri. La parte di nastro usata per il nodo e il fiocco è lunga complessivamente 47 cm. Quanti centimetri è lungo, in totale, il nastro?

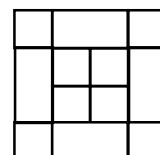


6. Il foglio di Mattia

Mattia ha scritto su un foglio il numero 5 0 2 1 9 7 2 9 7 0. Vuole tagliare il foglio verticalmente ottenendo tre strisce su ognuna delle quali ci sia una parte del numero che ha scritto (ad esempio 50 sulla prima, 21972 sulla seconda e 970 sulla terza). Vuole operare i tagli in modo che la somma dei tre numeri che ottiene sia la più bassa possibile. Quanto sarà questa somma?

7. I quadrati

Quanti diversi quadrati potete vedere in questa figura?



8. Cinque numeri

Alice ha scritto 5 numeri interi consecutivi, poi ha aggiunto la cifra 0 a destra di uno di essi e, così modificato, l'ha sommato agli altri 4: la somma è 210 (ad esempio, se avesse scritto 9, 10, 11, 12, 13 e avesse aggiunto 0 a 10, la somma sarebbe $9 + 100 + 11 + 12 + 13 = 145$). A quale numero Alice ha aggiunto la cifra 0 in coda?

9. La cisterna

L'acqua contenuta in una cisterna della capacità di 2.000 litri può essere prelevata aprendo due rubinetti: uno permette di prelevare 2 litri e mezzo al secondo, l'altro solo 1 litro al secondo. I due rubinetti sono stati aperti, uno (non sappiamo quale) 10 minuti fa, l'altro 5 minuti esatti dopo. Ora nella cisterna ci sono 300 litri d'acqua. Quanti ce n'erano prima che venisse aperto il primo rubinetto?

10. I numeri di due cifre

Michele ha scritto su un foglio tutti i 90 numeri interi di due cifre. Poi, per ognuno di essi, ha calcolato il prodotto delle sue due cifre e infine ha sommato tutti questi prodotti. Che somma ha ottenuto?

11. Le somme che danno 2022

In quanti modi diversi il numero 2022 può essere scritto come somma di due numeri interi dispari? (Attenzione: due somme in cui gli addendi siano gli stessi, ma in ordine opposto, vanno considerate come un modo solo.)

12. Il gatto e la tartaruga

Un gatto e una tartaruga partono insieme da un punto A per raggiungere un punto B lungo uno stesso percorso, ognuno camminando alla propria velocità che rimane la stessa durante tutto il percorso. Quando il gatto, che è più veloce, arriva in B , immediatamente torna indietro lungo il percorso e incontra la tartaruga esattamente a metà del percorso. Allora inverte di nuovo la marcia e arriva in B , dove la tartaruga lo raggiunge esattamente tre quarti d'ora dopo. Di quanti minuti è la differenza fra il tempo che impiega il gatto e quello che impiega la tartaruga per coprire una volta il percorso da A a B ?

13. I numeri di Clara

Clara ha scritto tutti i numeri di 4 cifre tali che la somma delle cifre sia 4 e il prodotto delle cifre sia 0. Quanti numeri ha scritto?

14. La sequenza

Una sequenza di numeri incomincia così: 1, 2, 3, ... e prosegue aggiungendo come nuovo termine la somma di tutti quelli che lo precedono. Quale numero si trova al quattordicesimo posto?

15. A teatro

Aldo, Bruna e Cecilia vanno a teatro, dove i posti sono a file di 6. Vogliono sedersi in una stessa fila ma, per ragioni di Covid, deve esserci sempre almeno un posto libero fra due di loro. In quanti modi diversi possono sistemarsi nella fila? Attenzione: se anche solo due di loro si scambiano di posto i modi vanno considerati diversi.



Kangourou della Matematica 2022

Coppa Ecolier a squadre

Finale 1

Cervia, 3 maggio 2022



Quesiti e soluzioni

1. Pagine mancanti

In un libro mancano molte pagine consecutive: la prima pagina che manca è la 231, l'ultima è quella che si scrive con le stesse cifre, ma ognuna in un posto diverso. Quante pagine mancano nel libro?

Risposta: 0082.

Sol. L'ultima pagina mancante deve essere la 312: $312 - 230 = 82$.

2. Quante somme!

Considerate tutti i numeri interi da 1 a 2022 inclusi e tutte le possibili somme di due diversi di essi. Quanti sono i valori tutti diversi fra loro che ottenete facendo queste somme?

Risposta: 4041.

Sol. Non è ottenibile alcun intero maggiore o uguale a $2022 + 2022$. Si possono invece ottenere tutti gli interi fra 1 e $2022 + 2021$ tranne 1 e 2.

3. Il libro

Un libro di Matematica è diviso in due parti: teoria ed esercizi. Per distinguerle, i bordi delle pagine della parte di teoria sono colorati di rosso: lo spessore totale delle pagine col bordo rosso è di 5 mm. Le pagine di teoria sono numerate da 1 a 70. Per numerare le pagine di tutto il libro sono state necessarie 1152 cifre. Quanti millimetri è spesso l'intero libro?

Risposta 0030.

Sol. Le cifre necessarie a numerare le pagine da 1 a 399 sono $9+180+900=1089$. Le restanti 63 numerano le pagine da 400 a 420. Quindi lo spessore della parte di teoria è $1/6$ del totale, che quindi misura 30 mm.

4. Numeri speciali di tre cifre

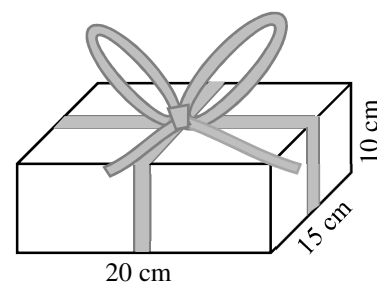
Quanti numeri interi di tre cifre (non necessariamente distinte) sono tali che la somma delle prime due cifre (quella delle centinaia e quella delle decine) è uguale alla terza cifra (quella delle unità)?

Risposta: 0045.

Sol. Se il numero è ABC , la cifra C può variare da 1 a 9 fornendo per la coppia AB $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$ possibilità.

5. Il regalo

In figura vedete un pacco regalo legato con un nastro. La scatola ha la forma di un parallelepipedo rettangolo (tipo “scatola da scarpe”) di cui sono evidenziate le misure in centimetri. La parte di nastro usata per il nodo e il fiocco è lunga complessivamente 47 cm. Quanti centimetri è lungo, in totale, il nastro?



Risposta: 0157.

Sol. $(20 + 15) \times 2 + 10 \times 4 + 47$.

6. Il foglio di Mattia

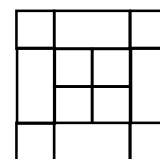
Mattia ha scritto su un foglio il numero 5 0 2 1 9 7 2 9 7 0. Vuole tagliare il foglio verticalmente ottenendo tre strisce su ognuna delle quali ci sia una parte del numero che ha scritto (ad esempio 50 sulla prima, 21972 sulla seconda e 970 sulla terza). Vuole operare i tagli in modo che la somma dei tre numeri che ottiene sia la più bassa possibile. Quanto sarà questa somma?

Risposta: 3444.

Sol. Le cifre scritte sono dieci, dunque almeno e al più uno dei numeri deve averne quattro e deve essere il più basso possibile: deve dunque essere 1972.

7. I quadrati

Quanti diversi quadrati potete vedere in questa figura?



Risposta: 0018.

Sol. Presa come unità di misura il lato del quadrato più piccolo: uno di lato 4, quattro di lato 3, cinque di lato 2, otto di lato 1.

8. Cinque numeri

Alice ha scritto 5 numeri interi consecutivi, poi ha aggiunto la cifra 0 a destra di uno di essi e, così modificato, l'ha sommato agli altri 4: la somma è 210 (ad esempio, se avesse scritto 9, 10, 11, 12, 13 e avesse aggiunto 0 a 10, la somma sarebbe $9 + 100 + 11 + 12 + 13 = 145$). A quale numero Alice ha aggiunto la cifra 0 in coda?

Risposta: 0015.

Sol. Il numero più piccolo deve avere due cifre: se fosse 9, anche aggiungendo 0 a 13 non si arriverebbe a 210. Deve essere più piccolo di 20: aggiungendo 0 a 20 si arriverebbe a più di 210. Osservando che anche la somma dei 4 numeri non alterati deve essere divisibile per 10, oppure con pochi tentativi, si arriva presto ai numeri da 13 a 17, con 0 aggiunto a 15, ed è l'unica possibilità.

9. La cisterna

L'acqua contenuta in una cisterna della capacità di 2.000 litri può essere prelevata aprendo due rubinetti: uno permette di prelevare 2 litri e mezzo al secondo, l'altro solo 1 litro al secondo. I due rubinetti sono stati aperti, uno (non sappiamo quale) 10 minuti fa, l'altro 5 minuti esatti dopo. Ora nella cisterna ci sono 300 litri d'acqua. Quanti ce n'erano prima che venisse aperto il primo rubinetto?

Risposta: 1650.

Sol. Se il primo rubinetto aperto fosse stato quello da 2 litri e mezzo, sarebbero usciti complessivamente 1.500 + 300 litri: troppi, tenuto conto dei 300 litri rimasti e della capacità. Dunque il primo rubinetto aperto è stato quello da 1 litro, e i litri usciti sono 600 + 750.

10. I numeri di due cifre

Michele ha scritto su un foglio tutti i 90 numeri interi di due cifre. Poi, per ognuno di essi, ha calcolato il prodotto delle sue due cifre e infine ha sommato tutti questi prodotti. Che somma ha ottenuto?

Risposta: 2025.

Sol. I multipli di 10 forniscono prodotto 0. Gli interi da 11 a 19 forniscono come prodotto rispettivamente gli interi da 1 a 9 la cui somma è 45; quelli da 21 a 29 contribuiscono allora alla somma totale con 2×45 e così via fino a quelli da 91 a 99 che contribuiscono con 9×45 . Allora la somma complessiva è $(1 + 2 + \dots + 9) \times 45 = 45 \times 45 = 2025$.

11. Le somme che danno 2022

In quanti modi diversi il numero 2022 può essere scritto come somma di due numeri interi dispari? (*Attenzione: due somme in cui gli addendi siano gli stessi, ma in ordine opposto, vanno considerate come un modo solo.*)

Risposta: 0506.

Sol. Un modo è $1.011 + 1.011$. Gli altri modi sono tanti quanti gli interi dispari da 1 a 1.009 estremi inclusi, cioè $1.010 : 2 = 505$ (gli interi dispari da 1.013 a 2.021 sono già stati considerati come secondi addendi di questi).

12. Il gatto e la tartaruga

Un gatto e una tartaruga partono insieme da un punto A per raggiungere un punto B lungo uno stesso percorso, ognuno camminando alla propria velocità che rimane la stessa durante tutto il percorso. Quando il gatto, che è più veloce, arriva in B , immediatamente torna indietro lungo il percorso e incontra la tartaruga esattamente a metà del percorso. Allora inverte di nuovo la marcia e arriva in B , dove la tartaruga lo raggiunge esattamente tre quarti d'ora dopo. Di quanti minuti è la differenza fra il tempo che impiega il gatto e quello che impiega la tartaruga per coprire una volta il percorso da A a B ?

Risposta: 0090.

Sol. Per coprire metà percorso il gatto impiega 45 minuti in meno del tempo della tartaruga.

13. I numeri di Clara

Clara ha scritto tutti i numeri di 4 cifre tali che la somma delle cifre sia 4 e il prodotto delle cifre sia 0. Quanti numeri ha scritto?

Risposta: 0019.

Sol. Almeno una delle cifre deve essere 0 e ogni può essere solo 0 o 1 o 2 o 3 o 4. Ce ne sono: 1 che inizia con 4, 3 che iniziano con 3, 6 che iniziano con 2, 9 che iniziano con 1.

14. La sequenza

Una sequenza di numeri incomincia così: 1, 2, 3, ... e prosegue aggiungendo come nuovo termine la somma di tutti quelli che lo precedono. Quale numero si trova al quattordicesimo posto?

Risposta: 6144.

Sol. A partire dalla quarta posizione ogni termine è il doppio del precedente. Quindi si tratta di calcolare $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 3 \times 2048 = 6144$.

15. A teatro

Aldo, Bruna e Cecilia vanno a teatro, dove i posti sono a file di 6. Vogliono sedersi in una stessa fila ma, per ragioni di Covid, deve esserci sempre almeno un posto libero fra due di loro. In quanti modi diversi possono sistemarsi nella fila? Attenzione: se anche solo due di loro si scambiano di posto i modi vanno considerati diversi.

Risposta: 0024.

Sol. Ignorando i posti liberi, le possibili disposizioni dei tre sono 6: allora il numero dei modi coincide con il numero dei possibili modi di avere liberi tre posti, moltiplicato per 6. Può restare libero o il primo posto della fila o l'ultimo, o possono restare liberi il secondo e il terzo o il quarto e il quinto: per ogni scelta i posti liberi restanti sono obbligati.