



## Quesiti

### 1. Somme

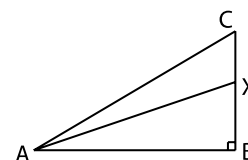
Chiamate  $m$  il più piccolo numero di due cifre la somma delle quali sia ancora un numero di due cifre. Chiamate  $M$  il più grande numero di due cifre la cui somma sia un numero con una cifra sola. Quanto vale  $m + M$ ?

### 2. Gli oggetti di Gertrude

Gertrude ha cinque oggetti: tre quadrati e due cerchi. Se li dispone in fila a caso sul tavolo, quante probabilità su 100 ci sono che il primo e l'ultimo oggetto siano due quadrati?

### 3. Il triangolo spezzato

Nel seguito denotiamo con  $WZ$  la lunghezza del generico segmento di estremi  $W$  e  $Z$ . Osservate la figura. Nel triangolo  $ABC$  l'angolo in  $B$  è retto e il punto  $X$  è tale che  $BX/XC = 5/4$  e  $AB = 3CX$ . L'area del triangolo  $CXA$  è  $54 \text{ cm}^2$ . Qual è la lunghezza in centimetri del perimetro di  $CXA$  ?



### 4. Gianni il ciclista

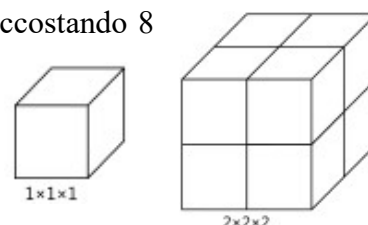
Gianni deve compiere un certo tragitto in bicicletta. Fino a questo istante ne ha percorso un terzo alla velocità media di  $7 \text{ km/h}$ . Quale deve essere la sua velocità media nei restanti due terzi se vuole che la sua velocità media su tutto il percorso sia di  $21 \text{ km/h}$ ? (Scrivete [9999] se pensate che gli sia impossibile ottenere quello che vuole.)

### 5. Per 35

$M$  è il più piccolo multiplo (intero positivo) di 35 le cui cifre sono tutte uguali fra loro. Qual è la somma delle cifre di  $M$ ?

### 6. Disegnar cubetti

Le figure mostrano, in prospettiva, due cubi; il secondo è ottenuto accostando 8 cubi uguali al primo. Quanti segmenti occorrerà tracciare per disegnare, con lo stesso tipo di prospettiva, il cubo ottenuto accostando 1000 cubi uguali al primo? Per intenderci su che cosa intendiamo per "segmento", vi diciamo che per disegnare il primo cubo sono stati tracciati 9 segmenti, per disegnare il secondo ne sono stati tracciati 15.



### 7. Confetti

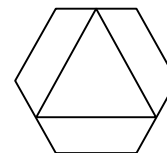
Un vaso contiene dei confetti. Passa Simone e ne prende  $1/15$ ; poi passa Sara e ne prende  $1/8$  di quelli lasciati da Simone. Prima che arrivasse Simone, nel vaso c'era la più piccola quantità di confetti con la quale è stato possibile che ciò avvenisse. Quanti confetti c'erano?

## 8. I pattinatori

Aldo, Bruno e Carlo si divertono a pattinare su una pista circolare. Partono allo stesso istante da uno stesso punto e nello stesso verso; ognuno pattina a velocità costante: Bruno va più veloce di Carlo, ma meno veloce di Aldo. Si fermano non appena si ritrovano tutti e tre insieme: quando si fermano Aldo ha sorpassato Carlo 10 volte. Quanti sorpassi fra loro tre sono avvenuti complessivamente prima di quel momento? (Scrivete [9999] se pensate che la situazione descritta sia impossibile.)

## 9. Un triangolo nell'esagono

Un esagono regolare di lato 12 cm contiene un triangolo i cui vertici sono i punti medi di tre lati a due a due non adiacenti (vedi figura). Quanti centimetri misura il perimetro del triangolo?



## 10. 2016 e i cubi

2016 è esprimibile come somma delle terze potenze di alcuni numeri interi positivi consecutivi. Quanto vale la somma di questi numeri?

## 11. 2016 e potenze di 2

2016 è esprimibile come somma di potenze di 2 con esponenti che sono numeri interi positivi consecutivi. Quanto vale la somma di questi esponenti?

## 12. I divisori di 2016

Quanti divisori ha il numero 2016?

## 13. Colora i vertici

Avete a disposizione tre colori diversi per colorare i vertici  $ABCD$  di un quadrato. Volete che vertici adiacenti ricevano colori diversi. In quanti diversi modi potete farlo? Tenete presente che ogni vertice ha un nome, quindi due colorazioni vanno ritenute diverse quando qualche vertice riceve colori diversi.

## 14. Le esacoppie

Chiamo *esacoppia* una coppia di numeri interi di tre cifre scritti utilizzando tutte e sole le cifre da 1 a 6. Quante sono le esacoppie tali che sia massima la somma dei due numeri che le compongono? Attenzione: le esacoppie sono coppie non ordinate; in altre parole, l'esacoppia  $\{123,456\}$  coincide con l'esacoppia  $\{456,123\}$ .



## Quesiti e soluzioni

### 1. Somme

Chiamate  $m$  il più piccolo numero di due cifre la somma delle quali sia ancora un numero di due cifre. Chiamate  $M$  il più grande numero di due cifre la cui somma sia un numero con una cifra sola. Quanto vale  $m + M$ ?

[0109]  $m = 19, M = 90$ .

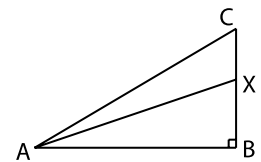
### 2. Gli oggetti di Gertrude

Gertrude ha cinque oggetti: tre quadrati e due cerchi. Se li dispone in fila a caso sul tavolo, quante probabilità su 100 ci sono che il primo e l'ultimo oggetto siano due quadrati?

[0030] I 3 quadrati e i 2 cerchi possono essere disposti in 10 modi diversi e solo 3 di queste disposizioni rispettano la condizione imposta: CqqqC, CCqqq, qqqCC, qCqqC, CqqCq, CqCqq, qqCqC, qqCCq, qCCqq, qCqCq

### 3. Il triangolo spezzato

Nel seguito denotiamo con  $WZ$  la lunghezza del generico segmento di estremi  $W$  e  $Z$ . Osservate la figura. Nel triangolo  $ABC$  l'angolo in  $B$  è retto e il punto  $X$  è tale che  $BX/XC = 5/4$  e  $AB = 3CX$ . L'area del triangolo  $CXA$  è  $54 \text{ cm}^2$ . Qual è la lunghezza in centimetri del perimetro di  $CXA$  ?



[0048] L'area di  $CXA$  è  $(3CX^2)/2$ , quindi  $CX^2 = 36 \text{ cm}^2$ , cioè  $CX = 6 \text{ cm}$ . Dunque per il teorema di Pitagora

$$AX^2 = 6^2 (3^2 + 5^2/4^2) = (6 \times 13)^2/4^2 \text{ cm}^2 \text{ e } AC^2 = 6^2 (3^2 + 9^2/4^2) = (6 \times 3 \times 5)^2/4^2 \text{ cm}^2.$$

Dunque  $AX = (3 \times 13)/2 = 19,5 \text{ cm}$ ;  $AC = (9 \times 5)/2 = 22,5 \text{ cm}$  e il perimetro di  $CXA$  è  $48 \text{ cm}$ .

### 4. Gianni il ciclista

Gianni deve compiere un certo tragitto in bicicletta. Fino a questo istante ne ha percorso un terzo alla velocità media di  $7 \text{ km/h}$ . Quale deve essere la sua velocità media nei restanti due terzi se vuole che la sua velocità media su tutto il percorso sia di  $21 \text{ km/h}$ ? (Scrivete [9999] se pensate che gli sia impossibile ottenere quello che vuole.)

[9999] Se su un terzo del percorso Gianni ha tenuto un terzo della velocità media che si è prefisso, ha già utilizzato tutto il tempo disponibile per coprire l'intero percorso.

## 5. Per 35

$M$  è il più piccolo multiplo (intero positivo) di 35 le cui cifre sono tutte uguali fra loro. Qual è la somma delle cifre di  $M$ ?

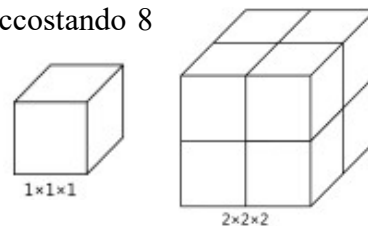
[0030] Se  $M$  è multiplo di 35,  $M$  è multiplo di 5 e quindi, non potendo le sue cifre essere tutte uguali a 0,  $M$  ha la forma  $55\dots5$ . Ma  $M = 5 \cdot 11\dots1$  è divisibile per 35 se e solo se  $11\dots1$  è divisibile per 7. Il primo numero di tale forma divisibile per 7 è 111111, quindi il primo numero con cifre tutte uguali divisibile per 35 è 555555, con somma delle cifre 30.

Per trovare 555555 si può procedere con la divisione in colonna aggiungendo sempre 5 finché si ha resto zero:

$$555 = 35 \times 15 + 30; 5555 = 35 \times 158 + 25; 55555 = 35 \times 1586 + 45; 555555 = 35 \times 15873.$$

## 6. Disegnar cubetti

Le figure mostrano, in prospettiva, due cubi; il secondo è ottenuto accostando 8 cubi uguali al primo. Quanti segmenti occorrerà tracciare per disegnare, con lo stesso tipo di prospettiva, il cubo ottenuto accostando 1000 cubi uguali al primo? Per intenderci su che cosa intendiamo per “segmento”, vi diciamo che per disegnare il primo cubo sono stati tracciati 9 segmenti, per disegnare il secondo ne sono stati tracciati 15.



[0063] Accostando 1000 cubi uguali al primo si ha un cubo  $10 \times 10 \times 10$ : per disegnarlo sono necessari e sufficienti  $10 \times 2 + 1$  segmenti “orizzontali” (10 per ogni faccia su cui si vede disegnato un segmento di questo tipo già nel caso  $2 \times 2 \times 2$ , più uno spigolo in comune),  $10 \times 2 + 1$  segmenti “verticali” e  $10 \times 2 + 1$  segmenti “obliqui”. In totale 63.

## 7. Confetti

Un vaso contiene dei confetti. Passa Simone e ne prende  $1/15$ ; poi passa Sara e ne prende  $1/8$  di quelli lasciati da Simone. Prima che arrivasse Simone, nel vaso c’era la più piccola quantità di confetti con la quale è stato possibile che ciò avvenisse. Quanti confetti c’erano?

[0060] Il numero di confetti deve essere divisibile per 15, ma anche per 4, in modo che i  $14/15$  di confetti residui siano divisibili per 8. Quindi il numero è multiplo di 60: di fatto se il numero è 60 Simone può prendere 4 confetti, lasciando a Sara la possibilità di prendere  $56/8=7$  confetti.

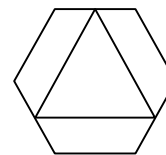
## 8. I pattinatori

Aldo, Bruno e Carlo si divertono a pattinare su una pista circolare. Partono allo stesso istante da uno stesso punto e nello stesso verso; ognuno pattina a velocità costante: Bruno va più veloce di Carlo, ma meno veloce di Aldo. Si fermano non appena si ritrovano tutti e tre insieme: quando si fermano Aldo ha sorpassato Carlo 10 volte. Quanti sorpassi fra loro tre sono avvenuti complessivamente prima di quel momento? (Scrivete [9999] se pensate che la situazione descritta sia impossibile.)

[0019] Supponiamo che i 3 si ritrovino insieme per la prima volta dopo  $a + x$  giri di Aldo,  $b + x$  giri di Bruno e  $c + x$  giri di Carlo (ove  $x$  indica una possibile frazione di giro che deve essere uguale per tutti visto che devono trovarsi nello stesso punto della pista circolare). Allora Aldo ha superato Carlo  $(a + x) - (c + x) - 1 = a - c - 1$  volte e Bruno  $(a + x) - (b + x) - 1 = a - b - 1$  volte, mentre Bruno ha superato Carlo  $(b + x) - (c + x) - 1 = b - c - 1$  volte; il numero totale di sorpassi è quindi  $a - c - 1 + a - b - 1 + b - c - 1 = 2(a - c - 1) - 1 = 20 - 1$ .

## 9. Un triangolo nell'esagono

Un esagono regolare di lato 12 cm contiene un triangolo i cui vertici sono i punti medi di tre lati a due a due non adiacenti (vedi figura). Quanti centimetri misura il perimetro del triangolo?



[0054] I lati obliqui dei trapezi misurano 6 cm e quindi, dato che la misura del loro angolo alla base è di  $60^\circ$  la lunghezza della base maggiore supera di  $3 + 3$  cm quella della base minore.

## 10. 2016 e i cubi

2016 è esprimibile come somma delle terze potenze di alcuni numeri interi positivi consecutivi. Quanto vale la somma di questi numeri?

[0042] È noto (per una dimostrazione elementare si veda ad es. "*Dimostrazioni per immagini*", ed. Kangourou Italia 2016) che la somma dei primi  $n$  cubi è  $[n(n+1)/2]^2$ . In particolare per  $n = 9$  si ha  $1^3 + 2^3 + \dots + 9^3 = 45^2 = 2025$ ; togliendo  $1^3 + 2^3$  si ottiene 2016; e la somma dei numeri da 3 a 9 compresi è  $45 - 3 = 42$ .

## 11. 2016 e potenze di 2

2016 è esprimibile come somma di potenze di 2 con esponenti che sono numeri interi positivi consecutivi. Quanto vale la somma di questi esponenti?

[0045]  $2016 = 2^{10} + 992 = 2^{10} + 2^9 + 480 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 224 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 96 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 32 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5$ . La somma degli esponenti è  $15 \times 3 = 45$ .  
O anche  $2016 = 2^{11} - 32 = 2^5(2^6 - 1) = 2^5(1 + 2 + \dots + 2^5) = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5$ .

## 12. I divisori di 2016

Quanti divisori ha il numero 2016?

[0036]  $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$ : per ognuna delle 6 potenze di 2 (da  $2^0$  a  $2^5$ ) che dividono 2016, c'è la possibilità di moltiplicare per una delle 3 potenze di 3 che dividono 2016 e per le due potenze di 7 che dividono 2016: in totale  $6 \times 3 \times 2 = 36$ .

## 13. Colora i vertici

Avete a disposizione tre colori diversi per colorare i vertici  $ABCD$  di un quadrato. Volete che vertici adiacenti ricevano colori diversi. In quanti diversi modi potete farlo? Tenete presente che ogni vertice ha un nome, quindi due colorazioni vanno ritenute diverse quando qualche vertice riceve colori diversi.

[0018] Denotiamo i colori con 1, 2, 3: c'è la possibilità di colorare ogni vertice con lo stesso colore del suo opposto (utilizzando dunque solo due colori) e questo porta a  $3 \times 2 = 6$  colorazioni diverse; inoltre c'è la possibilità di colorare due vertici opposti con colori diversi e gli altri due con lo stesso colore (ad es.  $A = 1, B = 2, C = 3, D = 2$ ); è possibile ottenere 4 colorazioni diverse (per rotazione della figura attorno al suo centro) per ogni scelta del colore da ripetere: quindi ci sono altre 12 colorazioni diverse.

## 14. Le esacoppie

Chiamo esacoppia una coppia di numeri interi di tre cifre scritti utilizzando tutte e sole le cifre da 1 a 6. Quante sono le esacoppie tali che sia massima la somma dei due numeri che le compongono? Attenzione: le esacoppie sono coppie non ordinate; in altre parole, l'esacoppia  $\{123,456\}$  coincide con l'esacoppia  $\{456,123\}$ .

[0004] Una coppia è  $\{642,531\}$ , le altre tre si ottengono scambiando le cifre delle decine e delle unità.