



Kangourou della Matematica 2014
Coppa a squadre Kangourou
Semifinale turno A
Cervia, 10 maggio 2014



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI MILANO

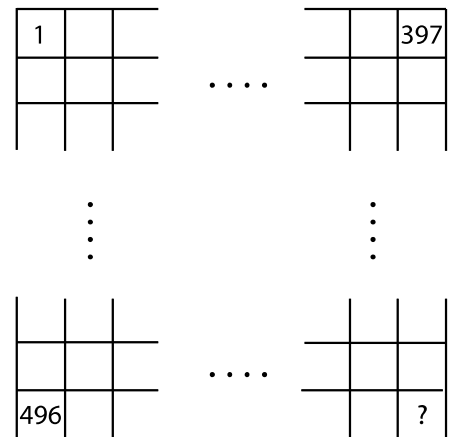
Quesiti

1. Lo sconto

Per festeggiare l'anniversario della sua apertura, una pasticceria oggi offre lo sconto del 30% su tutti gli articoli venduti. Di più, sulla torta più rappresentativa della sua produzione la pasticceria offre un ulteriore sconto del 20% sul prezzo già scontato. Per questa torta, qual è la percentuale di sconto sul prezzo iniziale?

2. La griglia delle medie

In ognuna delle caselle di una griglia 100×100 è stato inserito un numero intero positivo. Ogni numero inserito è la media aritmetica sia dei due numeri che gli sono adiacenti in verticale, sia dei due numeri che gli sono adiacenti in orizzontale, sia dei due numeri che gli sono adiacenti in diagonale (quando i due numeri esistono). La figura vi mostra quali numeri sono stati inseriti in tre delle caselle di vertice. Che numero è stato inserito nella quarta?



3. Rette parallele e rette perpendicolari

Nel piano sono tracciate 5 rette parallele e alcune rette ad esse perpendicolari (dunque anch'esse fra loro parallele). Complessivamente si possono individuare n rettangoli, ciascuno avente i lati su quattro delle rette tracciate. Si sa che n è il numero più vicino possibile a 1000 con questi presupposti. Quanto vale n ?

4. Il nuoto di Luisa

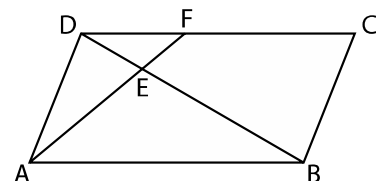
In un parco c'è una piscina perfettamente circolare. Luisa si tuffa da un punto del bordo, nuota verso Est e dopo 24 metri tocca nuovamente il bordo. Da questo nuovo punto del bordo nuota verso Nord e dopo 7 metri tocca nuovamente il bordo. Quanti metri misura il diametro della piscina?

5. Equazione in interi

Per quante coppie ordinate (x,y) di numeri interi positivi si ha che $x + 3y = 2014$?

6. Il parallelogramma

Osservate la figura: $ABCD$ è un parallelogramma, l'area del triangolo AED è 360 m^2 , mentre l'area del triangolo ABE è 540 m^2 . Qual è, in m^2 , l'area del triangolo DEF ?



7. La somma è 1/5

Quante coppie (a,b) di numeri interi positivi sono tali che $1/a + 1/b = 1/5$? (Se $a \neq b$, la coppia (a,b) va considerata diversa dalla coppia (b,a) .)

8. Quante cifre 0?

Denotiamo con $R(k)$ il numero intero positivo la cui scrittura consiste di esattamente k cifre tutte uguali a 1 (ad esempio, $R(3) = 111$). Il quoziente $R(25)/R(5)$ è un numero intero: quante delle sue cifre sono uguali a 0?

9. La rotazione delle gomme

Un'auto monta delle gomme speciali tutte uguali fra loro, piuttosto delicate: se montate in posizione anteriore vanno sostituite dopo 3.000 Km, se montate in posizione posteriore vanno sostituite dopo 4.500 Km. Ora tutte le gomme sono nuove. Per fare in modo che il momento in cui è necessario sostituirle sia lo stesso per tutte e quattro, dopo quanti chilometri si dovranno scambiare le posizioni, da anteriore a posteriore e viceversa, delle quattro gomme?

10. La differenza

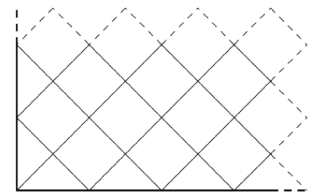
Qual è la somma delle cifre del numero intero $777.777.777.777.777^2 - 222.222.222.222.223^2$?

11. Il quarto vertice

Nel piano riferito all'usuale sistema di assi cartesiani ortogonali i punti $(1,-1)$, $(-1,0)$ e $(0,1)$ sono tre dei vertici di un parallelogramma. Considerate tutti i punti che possono costituire il quarto vertice e sommate tutte le loro coordinate. Che risultato ottenete?

12. Il pavimento

La figura schematizza una porzione di un pavimento rettangolare. Per piastrellarlo sono state usate piastrelle quadrate tutte della stessa dimensione, spezzate a metà per ottenere piastrelle triangolari che sono state usate solo lungo i bordi. Lungo ciascuno dei bordi corti sono disposte 20 piastrelle triangolari, lungo ciascuno di quelli lunghi ne sono disposte 86. Quante piastrelle quadrate di quelle usate sono rimaste intere?



13. Segnali chilometrici

Giulio sta guidando a velocità costante su un'autostrada. Ad un certo momento nota che le due cifre del numero presente sul segnale chilometrico che sta passando sono quelle del segnale che aveva passato esattamente mezz'ora prima, ma scambiate fra loro. Dopo un'altra mezz'ora esatta di guida nota che il numero presente sul segnale che sta passando è formato dalle due cifre del segnale visto la prima volta, nello stesso ordine, con la cifra zero intercalata fra le due. Qual è il numero presente sul terzo segnale chilometrico?

14. Tre somme

Sapete che a , b e c sono tre numeri tali che $a + b + c = 300$ e $3a + 2b + c = 600$. Quanto vale $3a + 4b + 5c$?

15. Prodotto e somma

Il prodotto di quattro numeri interi consecutivi è 358.800. Qual è la loro somma?

3. Rette parallele e rette perpendicolari

Nel piano sono tracciate 5 rette parallele e alcune rette ad esse perpendicolari (dunque anch'esse fra loro parallele). Complessivamente si possono individuare n rettangoli, ciascuno avente i lati su quattro delle rette tracciate. Si sa che n è il numero più vicino possibile a 1000 con questi presupposti. Quanto vale n ?

[1050] Ogni rettangolo è individuato da una coppia (non ordinata) di rette, diciamo "orizzontali" e una coppia (non ordinata) di rette "verticali", e viceversa. Sia m il numero, che non conosciamo, delle rette verticali: le coppie di rette orizzontali sono $5 \times 4 / 2 = 10$, quelle di rette verticali sono $m(m - 1)/2$. Allora deve essere $n = 10 \times m(m - 1)/2 = 5(m^2 - m)$.

Chiaramente n cresce al crescere di m e $m = 14$ fornisce $n = 910$, $m = 15$ fornisce $n = 1050$.

4. Il nuoto di Luisa

In un parco c'è una piscina perfettamente circolare. Luisa si tuffa da un punto del bordo, nuota verso Est e dopo 24 metri tocca nuovamente il bordo. Da questo nuovo punto del bordo nuota verso Nord e dopo 7 metri tocca nuovamente il bordo. Quanti metri misura il diametro della piscina?

[0025] Le due direzioni di nuoto sono perpendicolari, quindi Luisa percorre i due cateti di un triangolo rettangolo: l'ipotenusa del triangolo è un diametro della piscina.

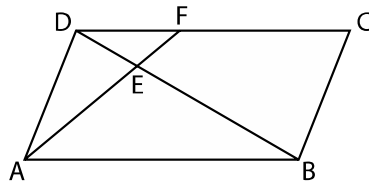
5. Equazione in interi

Per quante coppie ordinate (x,y) di numeri interi positivi si ha che $x + 3y = 2014$?

[0671] Per ogni intero positivo y tale che $3y < 2014$ esiste uno e un solo intero positivo x tale che $x + 3y = 2014$. Poiché $2014 = 3 \times 671 + 1$, tali valori di y sono 671.

6. Il parallelogramma

Osservate la figura: $ABCD$ è un parallelogramma, l'area del triangolo AED è 360 m^2 , mentre l'area del triangolo ABE è 540 m^2 . Qual è, in m^2 , l'area del triangolo DEF ?



[0240] I triangoli DEF e ABE sono simili con i lati ED e BE in corrispondenza. Per trovare il coefficiente di similitudine basta osservare che i triangoli AED e ABE hanno la stessa altezza rispetto alle basi, rispettivamente, ED e BE : allora ED è lunga $360/540 = 2/3$ volte BE . Ne segue che l'area di EDF è $(2/3)^2$ volte l'area di ABE .

7. La somma è 1/5

Quante coppie (a,b) di numeri interi positivi sono tali che $1/a + 1/b = 1/5$? (Se $a \neq b$, la coppia (a,b) va considerata diversa dalla coppia (b,a) .)

[0003] La coppia $(10,10)$ è ovviamente accettabile. Altre eventuali coppie (a,b) devono necessariamente essere tali che $1/a$ oppure $1/b$ sia strettamente compreso fra $1/10$ e $1/5$. È chiaro che solo per $a = 6$ si ha $1/5 - 1/a = 1/b$ per qualche b intero ($b = 30$ se $a = 6$): dunque anche le coppie $(6,30)$ e $(30,6)$ sono accettabili.

8. Quante cifre 0?

Denotiamo con $R(k)$ il numero intero positivo la cui scrittura consiste di esattamente k cifre tutte uguali a 1 (ad esempio, $R(3) = 111$). Il quoziente $R(25)/R(5)$ è un numero intero: quante delle sue cifre sono uguali a 0?

[0016] Immaginiamo di eseguire "manualmente" la divisione: $R(25)$ è costituito dall'accostamento di 5 blocchi del tipo $11111 = R(5)$, per cui il quoziente $R(25)/R(5)$ risulta intero e composto dall'allineamento di 4 blocchi del tipo 10000 a cui va aggiunto 1 come cifra finale.

9. La rotazione delle gomme

Un'auto monta delle gomme speciali tutte uguali fra loro, piuttosto delicate: se montate in posizione anteriore vanno sostituite dopo 3.000 Km, se montate in posizione posteriore vanno sostituite dopo 4.500 Km. Ora tutte le gomme sono nuove. Per fare in modo che il momento in cui è necessario sostituirle sia lo stesso per tutte e quattro, dopo quanti chilometri si dovranno scambiare le posizioni, da anteriore a posteriore e viceversa, delle quattro gomme?

[1800] Osserviamo che, visto che le ruote vengono scambiate, ogni ruota deve fare lo stesso numero di chilometri in posizione anteriore e in posizione posteriore. Detto x tale numero, visto che in posizione anteriore il consumo del battistrada per km è $1/3.000$ della disponibilità e in posizione posteriore è $1/4.500$, si deve avere $1 = x/3.000 + x/4.500$, da cui $x = 1.800$.

10. La differenza

Qual è la somma delle cifre del numero intero $777.777.777.777.777^2 - 222.222.222.222.223^2$?

[0074] Detto a^2 il minuendo e b^2 il sottraendo, si ha $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Facilmente si calcola $a - b = 555.555.555.555.554$ e $a + b = 10^{15}$. La somma richiesta è quindi $5 \times 14 + 4$.

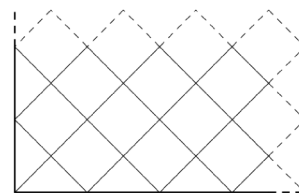
11. Il quarto vertice

Nel piano riferito all'usuale sistema di assi cartesiani ortogonali i punti $(1,-1)$, $(-1,0)$ e $(0,1)$ sono tre dei vertici di un parallelogramma. Considerate tutti i punti che possono costituire il quarto vertice e sommate tutte le loro coordinate. Che risultato ottenete?

[0000] Per ogni coppia formata da due dei tre punti assegnati, il parallelogramma da costruire deve avere il segmento che li collega come uno dei lati o una delle diagonali. Facilmente si ottiene allora che il quarto vertice può e deve essere uno dei seguenti tre punti: $(2,0)$, $(0,-2)$, $(-2,2)$.

12. Il pavimento

La figura schematizza una porzione di un pavimento rettangolare. Per piastrellarlo sono state usate piastrelle quadrate tutte della stessa dimensione, spezzate a metà per ottenere piastrelle triangolari che sono state usate solo lungo i bordi. Lungo ciascuno dei bordi corti sono disposte 20 piastrelle triangolari, lungo ciascuno di quelli lunghi ne sono disposte 86. Quante piastrelle quadrate di quelle usate sono rimaste intere?



[3334] Contiamo le piastrelle intere per file orizzontali: le file che non contengono piastrelle triangolari sono costituite da 86 piastrelle intere e sono 19, quelle che iniziano e terminano con una piastrella triangolare contengono 85 piastrelle intere e sono 20.

13. Segnali chilometrici

Giulio sta guidando a velocità costante su un'autostrada. Ad un certo momento nota che le due cifre del numero presente sul segnale chilometrico che sta passando sono quelle del segnale che aveva passato esattamente mezz'ora prima, ma scambiate fra loro. Dopo un'altra mezz'ora esatta di guida nota che il numero presente sul segnale che sta passando è formato dalle due cifre del segnale visto la prima volta, nello stesso ordine, con la cifra zero intercalata fra le due. Qual è il numero presente sul terzo segnale chilometrico?

[0106] La distanza tra il primo e il secondo segnale è inferiore a 100 km: anche la distanza fra il secondo e il terzo deve esserlo (Giulio guida a velocità costante), per cui la prima cifra del terzo segnale (e quindi del primo) deve essere 1. Detta x la cifra incognita, i numeri sul primo e terzo segnale sono allora rispettivamente (denotando ancora con x il numero la cui unica cifra è x) $10 + x$ e $100 + x$. Ne segue che la velocità è 90 km all'ora: si ha $10 + x + 45 = 10x + 1$ se e solo se $x = 6$.

14. Tre somme

Sapete che a , b e c sono tre numeri tali che $a + b + c = 300$ e $3a + 2b + c = 600$. Quanto vale $3a + 4b + 5c$?

[1200] Si ha $3a + 4b + 5c = 6(a + b + c) - (3a + 2b + c) = 6 \times 300 - 600$.

15. Prodotto e somma

Il prodotto di quattro numeri interi consecutivi è 358.800. Qual è la loro somma?

[0098] Poiché $358.800 = 3588 \times 100 = 3 \times 4 \times 4 \times 13 \times 23 \times 25$, la quaterna cercata è 23, 24, 25, 26.

In alternativa, si può ragionare come segue. È chiaro che i quattro numeri devono essere a cavallo della radice quarta di 358.800, che è un numero di poco inferiore alla radice quadrata di 600, che a sua volta sta tra 24 e 25. La quaterna cercata è 23, 24, 25, 26.