# Kangourou Italia
## Gara del 19 marzo 2009
## Categoria Cadet
Per studenti di terza della scuola secondaria di primo grado o prima della secondaria di secondo grado

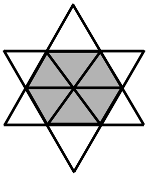
Cadet

**I quesiti dal N. 1 al N. 10 valgono 3 punti ciascuno**

1. In una stanza ci sono cani e gatti. Il numero delle zampe di gatto è il doppio del numero dei nasi di cane. Allora il numero dei gatti è
A) il doppio del numero dei cani. B) uguale al numero dei cani.
C) metà del numero di cani. D) 1/4 del numero dei cani.
E) 1/6 del numero dei cani.

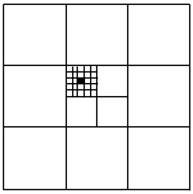
2. Ad una festa da ballo hanno partecipato 4 ragazze e 4 ragazzi. Alla fine i quattro ragazzi dichiarano di aver ballato con 3, 1, 2, 2 diverse compagne mentre tre delle ragazze dichiarano di aver ballato ciascuna con 2 diversi compagni. Con quanti compagni diversi ha ballato la quarta ragazza?
A) 1 B) 3 C) 0 D) 4 E) 2

3. La stella rappresentata in figura è formata da 12 triangoli equilateri identici. Il perimetro della stella è di 36 cm. Quanti centimetri misura il perimetro dell'esagono ombreggiato?
A) 6 B) 12 C) 18 D) 24 E) 30



4. Le case presenti in via Lunga sono numerate a partire da 1, senza saltare numeri. Enrico deve consegnare delle lettere in alcune case: precisamente deve consegnare una lettera in ciascuna casa che abbia un numero civico dispari, iniziando dalla casa numero 15 e finendo con la casa numero 53. Quante lettere deve consegnare in tutto?
A) 19 B) 20 C) 27 D) 38 E) 53

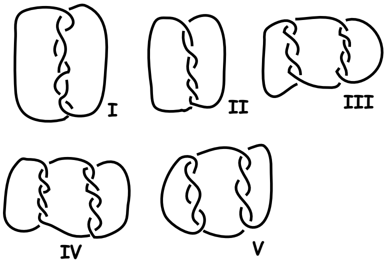
5. In figura è rappresentato un quadrato suddiviso in quadrati via via più piccoli. Se il quadrato più grande ha area 1, quanto vale l'area del quadratino nero?
A) 1/100 B) 1/300 C) 1/600
D) 1/900 E) 1/1000



6. Il prodotto di quattro diversi interi positivi è 100. Qual è la loro somma?
A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 20

7. Un ascensore può trasportare fino a 12 adulti oppure fino a 20 bambini. Quanti bambini possono salire al massimo insieme a 9 adulti?
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

8. La figura mostra cinque intrecci di corde. Quali di essi non possono essere realizzati con un unico spezzone di corda?

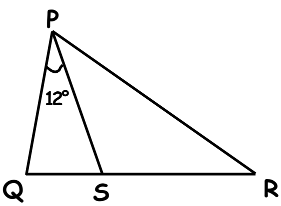



A) Tutti B) Nessuno
C) Tutti tranne II
D) Solo III, IV e V
E) Solo I, III e V



9. Un recipiente a forma di parallelepipedo rettangolo ha dimensioni tali che, riempito fino all'orlo, contiene un litro d'acqua. Ognuna delle sue tre dimensioni viene dimezzata, creando un nuovo recipiente della stessa forma. Se anche questo recipiente viene riempito fino all'orlo, quanti litri d'acqua contiene?
A) 0,0625 B) 0,125 C) 0,25 D) 0,5
E) Un numero diverso dai precedenti

10. I punti Q, R e S rappresentati in figura sono allineati, l'angolo QPS misura 12 gradi e i segmenti PQ, PS e RS hanno la stessa lunghezza. Quanti gradi misura l'angolo QPR?

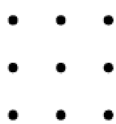



A) 60 B) 54 C) 42
D) 84 E) 36

I quesiti dal N. 11 al N. 20 valgono 4 punti ciascuno

11. Quanti numeri interi positivi $N$ hanno la seguente proprietà: "il numero di cifre della rappresentazione decimale del quadrato di $N$ è uguale al numero di cifre della rappresentazione decimale del cubo di $N$"?
A) 2 B) 3 C) 4 D) 9 E) Infiniti

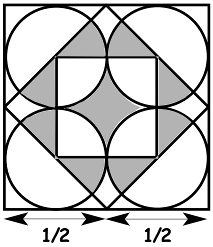
12. Qual è il più piccolo numero di punti che basta rimuovere dalla figura perché tra i punti che restano non ce ne siano tre allineati?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 7

13. Nicola ha misurato i sei angoli di due triangoli, uno acutangolo, l'altro ottusangolo. Ricorda le misure di quattro di questi angoli: 120°, 80°, 55° e 10°. Quanti gradi misura l'angolo più piccolo nel triangolo acutangolo?
A) 45 B) 55 C) 5 D) 10
E) I dati sono insufficienti per rispondere.

**14.** Il quadrato più grande rappresentato in figura ha area 1. Qual è l'area della regione ombreggiata?




A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{\pi}{12}$ C) $\frac{\pi + 2}{16}$

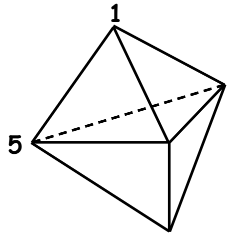
D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{1}{3}$



**15.** Su un'isola vivono due categorie di persone: i sinceri, che non mentono mai, e i bugiardi, che mentono sempre. Su quest'isola ci sono 25 persone in fila. Ognuno, tranne il primo della fila, dice che la persona davanti a lui nella fila è un bugiardo mentre il primo dice che tutti quelli dietro di lui sono bugiardi. Quanti bugiardi ci sono nella fila?

A) 24 B) 13 C) 12 D) 0 E) Non si può stabilire

**16.** Il solido in figura ha 6 facce, tutte triangolari. Ad ogni suo vertice viene associato un numero in modo che la somma dei numeri associati ai tre vertici di ogni singola faccia sia la stessa per tutte le facce. La figura indica i numeri associati a due dei vertici. Quanto vale la somma di tutti i numeri impiegati?

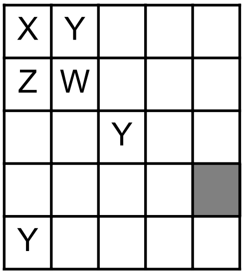



A) 9 B) 12 C) 17
D) 18 E) 24

**17.** Nell'uguaglianza $\frac{D\cdot O\cdot D\cdot I\cdot C\cdot I}{T\cdot R\cdot E} = Q\cdot U\cdot A\cdot T\cdot T\cdot R\cdot O$ lettere diverse rappresentano cifre diverse, mentre lettere uguali rappresentano cifre uguali. Quanti valori differenti può assumere il prodotto O•T•T•O?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**18.** Vogliamo colorare le celle della griglia in figura usando i quattro colori diversi X, Y, Z, W in modo che due celle che sono a contatto non ricevano mai lo stesso colore (due celle si considerano a contatto se hanno in comune almeno un vertice). La figura mostra che alcuni colori sono già stati assegnati. Con quali colori può essere colorata la cella ombreggiata?

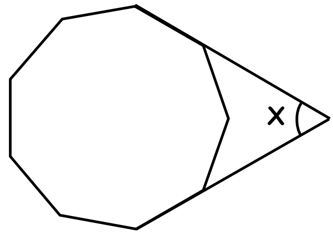



A) Solo Y. B) Solo Z. C) Solo W.

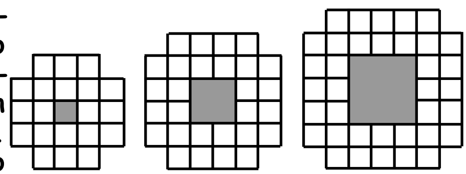
D) Indifferentemente Z o W.

E) Non è possibile realizzare la colorazione.

19. In figura è rappresentato un poligono regolare con 9 lati. Quanti gradi misura l'angolo X evidenziato in figura, realizzato prolungando due dei lati?
A) 40 B) 45 C) 50
D) 55 E) 60




20. In figura sono mostrati i primi tre disegni di una sequenza: ciascuno di essi è costituito da quadratini di lato 1 che circondano nel modo indicato un buco quadrato (grigio in figura). Quanti quadratini di lato 1 sono necessari per costruire il decimo disegno della sequenza?

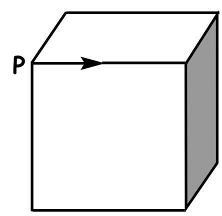


A) 76 B) 80 C) 84 D) 92 E) 100



I quesiti dal N. 21 al N. 30 valgono 5 punti ciascuno

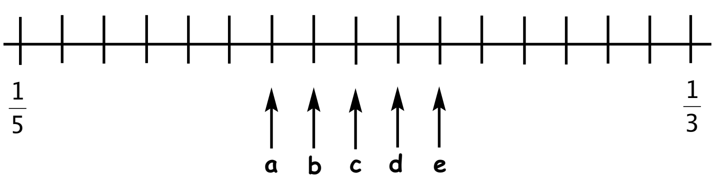
21. Ci muoviamo lungo gli spigoli del cubo in figura partendo dal punto P, nella direzione indicata dalla freccia. Alla fine del primo spigolo dobbiamo decidere se andare a destra o a sinistra e così pure alla fine di ogni spigolo che percorriamo successivamente: scegliamo alternando destra e sinistra. Quanti spigoli avremo percorso quando torneremo per la prima volta nel punto P?




A) 2 B) 4 C) 6 D) 9 E) 12

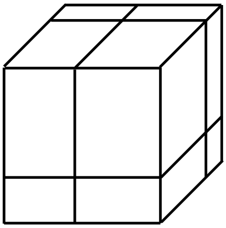
22. Quanti sono i numeri interi positivi di dieci cifre contenenti solo le cifre 1, 2 e 3 nei quali due qualsiasi cifre adiacenti differiscono di 1?
A) 16 B) 32 C) 64 D) 80 E) 100

23. In figura è rappresentato il segmento di retta numerica compreso tra le frazioni 1/5 e 1/3, suddiviso da tacche in segmenti di ugual lunghezza. Allora 1/4 corrisponde alla tacca indicata con




A) a
B) b
C) c
D) d
E) e

24. Con tre tagli abbiamo suddiviso un grande cubo in otto parallelepipedi rettangoli. Qual è il rapporto tra la somma delle superfici totali di questi otto parallelepipedi e la superficie totale del cubo originario?



A) 1:1 B) 4:3 C) 3:2
D) 4:1 E) 2:1

25. Quanti numeri interi positivi N soddisfano la seguente condizione: tra tutti i divisori di N, diversi da N e da 1, il maggiore è 45 volte il minore?
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3
E) più di 3

Cadet

26. Un quadrato è stato suddiviso esattamente (cioè senza avanzi e senza sovrapposizioni) in 2009 quadrati. Se la lunghezza del lato di ciascuno dei quadrati di cui si parla è un numero intero, qual è la minima lunghezza del lato del quadrato originario che rende possibile questa scomposizione?
A) 46 B) 47 C) 503 D) Un numero diverso dai precedenti. E) Tale scomposizione non è realizzabile.

27. In un quadrilatero non intrecciato PQRS il lato PQ misura 2006, il lato QR misura 2008, il lato RS misura 2007 e il lato SP misura 2009. Quali angoli interni del quadrilatero sono necessariamente minori di 180°?
A) P, Q, R, S B) P, Q, R C) Q, R, S
D) P, Q, S E) P, R, S

28. Sovrapponendo un quadrato di lato 6 centimetri a un triangolo posso coprire al massimo il 60% della superficie di tale triangolo. Sovrapponendo il triangolo al quadrato posso coprire al massimo i 2/3 della superficie del quadrato. Qual è in centimetri quadrati l'area del triangolo?
A) 22,8 B) 24 C) 36
D) 40 E) 60

29. Pinocchio ha scritto in sequenza alcuni numeri interi positivi tutti diversi fra loro e minori di 11. Il Grillo parlante osserva che in ogni coppia di numeri adiacenti, così come li ha allineati Pinocchio, ce n'è uno che è divisibile per l'altro. Quanti numeri può aver scritto al massimo Pinocchio?
A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

**30. In un triangolo ABC l'angolo in B misura 20 gradi e l'angolo in C misura 40 gradi. La lunghezza della bisettrice dell'angolo in A è 2. Quanto vale la differenza fra la lunghezza di BC e la lunghezza di AB?**
**A) 4 B) 2 C) 1,5 D) 1**
**E) Un valore diverso**

**2009**

**Categoria Cadet**

**Per studenti del terzo anno della scuola secondaria di primo grado o del primo anno della scuola secondaria di secondo grado**

1. Risposta **C)** Per ogni gatto (4 zampe) ci sono 2 (nasi di) cani.

2. Risposta **E)** Dalla dichiarazioni dei ballerini si deduce che si sono formate otto coppie lei-lui diverse. Le tre ragazze hanno completato 6 di queste coppie e quindi la quarta deve aver completato le altre due.

3. Risposta **C)** Ogni triangolo sul bordo della stella contribuisce con due lati alla stella e con uno all'esagono. Avendo i lati tutti la stessa lunghezza, il perimetro dell'esagono è metà di quello della stella.

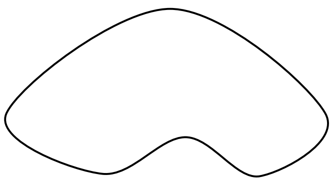
4. Risposta **B)** Le case da quella con il numero 15 a quella con il numero 53 incluse sono 39; di esse quelle che hanno numero dispari sono (38 : 2) + 1 = 20.

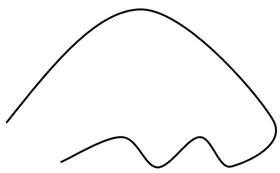
5. Risposta **D)** 5 x 5 = 25 quadrati uguali al quadratino nero formano uno dei 4 quadrati che, accostati, formano il quadrato centrale che risulta dalla suddivisione in 9 del quadrato più grande; quindi il quadrato più grande è equivalente a 24 x 4 x 9 = 900 quadratini uguali al quadratino nero.

6. Risposta **D)** L'unico modo per esprimere $100 = 2^2 \times 5^2$ come prodotto di quattro numeri interi a due a due diversi fra loro è 100 = 1 x 2 x 5 x 10; si ha 1 + 2 + 5 + 10 = 18.

7. Risposta **C)** Quando 9 adulti sono nell'ascensore, esso è occupato per 9/12 = 3/4; possono quindi salire 1/4 del numero di bambini che occuperebbero l'ascensore, cioè 20/4 = 5.

8. Risposta **E)** È abbastanza facile convincersi (vedi figure sottostanti) che un numero dispari di "anse" permette di chiudere un "anello", mentre un numero pari non lo permette e quindi fa passare sull'anello adiacente. Basta dunque contare le anse in ogni figura per appurare che I e III sono realizzati con 2 pezzi di spago,





mentre V è realizzato addirittura con 3 pezzi di spago; invece II e IV sono realizzati con un unico pezzo di spago.

9. Risposta **B)** Il volume coincide con il prodotto delle tre dimensioni: allora, ogni volta che si dimezza una delle tre dimensioni, si dimezza il volume. Se ognuna delle tre dimensioni viene dimezzata, il volume si riduce quindi a 1/8 di quello originario.

10. Risposta **B)** I triangoli PQS e PSR sono isosceli con vertice rispettivamente P e S; inoltre gli angoli alla base del primo sono supplementari dell'angolo al vertice del secondo. Visto che la somma degli angoli del triangolo PSR misura 180°, ciascuno dei suoi angoli alla base misurerà metà degli angoli alla base di PQS, cioè (180 - 12)/4 gradi. Ne consegue che l'angolo QPR, che è somma dell'angolo QPS e dell'angolo SPR, misura 12 + 42 = 54 gradi.

11. Risposta **B)** Il cubo di un numero maggiore o uguale a 10 ha sicuramente più cifre decimali del suo quadrato; la stessa cosa vale per i numeri da 5 a 9 poiché il quadrato è un numero con 2 cifre decimali mentre il cubo ne ha tre; infine il quadrato di 3 ha solo 1 cifra decimale, mentre il suo cubo ne ha due. Restano 1, 2 e 4 che soddisfano la condizione.

12. Risposta **C)** Togliendo i 3 punti lungo una diagonale si ottiene effettivamente una configurazione in cui non ci sono terne di punti allineati; viceversa togliendo solo 2 punti la cosa non è possibile poiché resta almeno una linea (riga o colonna) sulla quale non sta alcuno dei due punti e su quella linea ci sono 3 punti allineati.

13. Risposta **A)** Il triangolo ottusangolo ha un angolo che misura 120° e quindi non può avere un angolo acuto che misura 80° (la loro somma supererebbe 180°). Il triangolo acutangolo ha un angolo che misura 80°: se l'altro misurasse 10°, il triangolo sarebbe rettangolo, dal momento che il terzo angolo misurerebbe 90°; allora il secondo angolo del triangolo acutangolo misura 55° e il terzo misura 45°.

14. Risposta **A)** La regione ombreggiata è equivalente al quadrato più interno. La lunghezza dei lati di tale quadrato è metà di quella dei lati del quadrato esterno (pari a due diametri di circonferenza): dunque il quadrato più interno ha area pari a 1/4 del quadrato esterno.

15. Risposta **B)** Il primo della fila mente asserendo che tutti quelli che lo seguono sono bugiardi: in caso contrario, ognuno dal terzo in poi direbbe la verità e ne nascerebbe una contraddizione. Allora nella fila si alternano un bugiardo e un verace (che giustamente

afferma che chi lo precede è un bugiardo): ne segue che il numero dei bugiardi supera di 1 quello dei veraci, cioè, su 25 persone in fila, 13 mentono e 12 dicono la verità.

16. Risposta **C)** Ci sono due facce che condividono i vertici marcati con 1 e 5 e quindi devono avere lo stesso numero, diciamo x, nel terzo vertice. Allora 1 + 2x = 1 + 5 + x, cioè x = 5. Per simmetria, ne consegue che nel quinto vertice deve stare 1 e quindi la soma dei 5 numeri è 17.

17. Risposta **A)** Si nota che nell'uguaglianza entrano in gioco tutte le cifre poiché le lettere a due a due diverse sono 10 (D, O, I, C, T, R, E, Q, U, A). In particolare entra in giuoco anche 0, che sicuramente annulla il prodotto in cui compare. Quindi la lettera che corrisponde a 0 non è presente al denominatore e deve comparire tanto a destra che a sinistra dell'uguaglianza. L'unica lettera che gode di entrambe le proprietà è O. Visto che tale lettera compare anche nel prodotto O•T•T•O, anch'esso è sicuramente nullo.

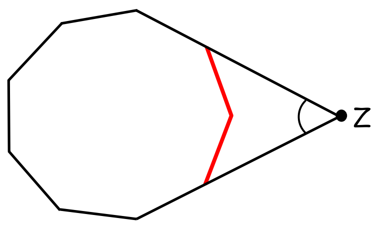
18. Risposta **D)** I colori sulla seconda e terza riga implicano che di fianco a Y ci sia X e sopra a Y ci sia Z; quindi sotto Z deve esserci Y

X Y X _ _
Z W Z _ _
Y X Y _ _
_ _ _ _ _
Y _ _ _ _

La prima colonna può essere completata sia inserendo Z sia inserendo W: tutte e due le soluzioni sono accettabili, poiché si può avere per esempio

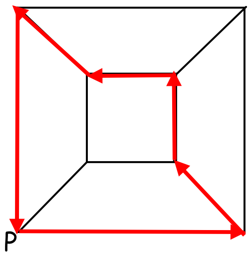
| | |
|---|---|
| X Y X Y X | X Y X Y X |
| Z W Z W Z | Z W Z W Z |
| Y X Y X Y | Y X Y X Y |
| Z W Z W Z | W Z W Z W |
| Y X Y X Y | Y X Y X Y |

19. Risposta **E)** È noto che ogni angolo interno di un poligono regolare con 9 lati misura (180 x 9 - 360)/9 = 140 gradi. Ne segue che (v. figura) ciascuno dei due triangoli con vertice Z e lato opposto coincidente con uno dei due lati evidenziati del 9-agono ha angoli interni adiacenti al lato di misura (180 - 140)° = 40° e [(360 - 140)/2]° = 110° e quindi angolo in Z di misura (180 - 40 - 110)° = 30°. Allora l'intero angolo, che è il doppio di questi angoli, misura 60°.

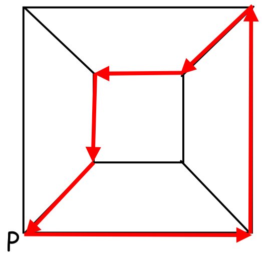


20. Risposta **D)** Il disegno di posto k può essere pensato ricavato da un quadrato di lato 4+k eliminando 4 quadratini di lato 1 ai vertici ed un quadrato centrale di lato $k^2$: contiene quindi $(4 + k)^2 - k^2 - 4 = 12 + 8k$ quadratini di lato 1. Per k = 10 questo calcolo porta a 92 quadratini.

21. Risposta **C)** L'alternarsi delle scelte fa sì che percorriamo sempre solo due spigoli




appartenenti ad una stessa faccia, come indicato nella figura a sinistra se si sceglie ds-sin o nella figura a destra se si sceglie sin-ds (in entrambe le figure i cubi sono visti dall'alto). In entrambi i casi dopo 6 passaggi il ciclo si chiude.




22. Risposta **C)** I numeri possono iniziare per 2, 1 o 3. Da ogni 2 possono partire due diverse sequenze (con passo successivo 1 oppure 3); dopo ogni 1 e dopo ogni 3 si è obbligati a inserire un 2. Allora le scelte possibili raddoppiano ogni due posizioni: partendo da 2 ci saranno $2^5$ scelte possibili, partendo da 3 o da 1 solo $2^4$. Complessivamente vi sono 32 + 16 + 16 = 64 possibilità.

23. Risposta **A)** La lunghezza del segmento delimitato da 1/5 e 1/3 è 2/15; tale segmento è suddiviso in 16 parti uguali, ciascuna delle quali misura quindi 1/120. Poiché 1/4 - 1/5 = 1/20, il punto corrispondente a 1/4 si trova all'estremità destra del 6° segmento.

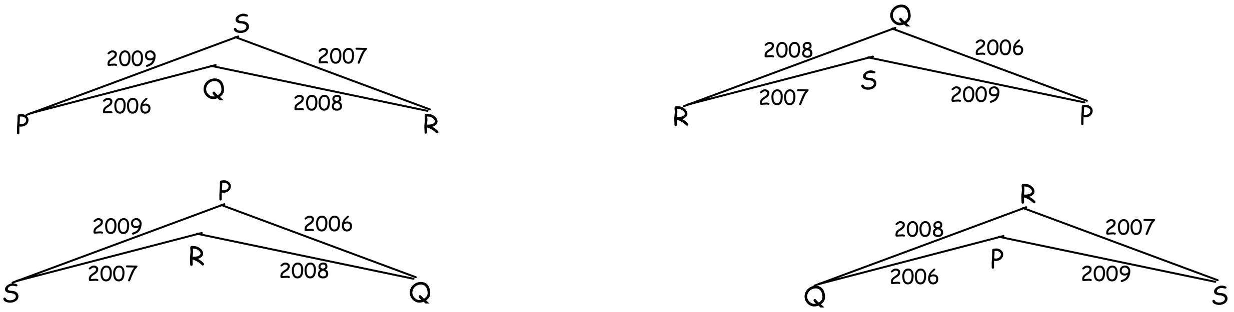
24. Risposta **E)** Ogni taglio produce due facce uguali alle facce del cubo. Quindi, una volta operati i 3 tagli, le facce di cui misuriamo la superficie sono 6 in più di quelle del cubo (cioè il doppio).

25. Risposta **C)** Chiamiamo x il più piccolo divisore di N diverso da 1. Allora il divisore più grande di N diverso da N la forma 45x e risulta $N = (45x)x = 3^2 5x^2$. È evidente che possiamo attribuire a x solo i valori 2 e 3, poiché x deve essere primo (altrimenti non sarebbe il più piccolo divisore di N) e deve essere <5 (altrimenti 3 sarebbe un divisore di N più piccolo di x).

26. Risposta **D)** Osserviamo innanzitutto che $44^2 = 16 \times 121 = 1936$ e quindi un quadrato di lato 44 non può contenere senza sovrapposizioni 2009 quadrati di lato almeno 1. Invece $45^2 = 2025 > 2009$. Ritagliando da un quadrato di lato 45 un quadrato di lato 4 rimane ancora lo spazio per 2009 quadrati di lato 1, ma complessivamente avremmo 2010

quadrati; invece togliendo due quadrati di lato 3 avremo spazio per 2007 quadrati di lato 1 e complessivamente per 2009 quadrati.
Si noti che l'equazione a incognite intere positive $(2009 - k) + kx^2 = 2025$, cioè $k(x^2 - 1) = 16$, soggiacente al problema non ha altre soluzioni. Infatti k può essere solo un divisore di 16; se $k = 2$ si trova $x = 3$; per $k = 4$ o 8 o 16 non ci sono valori interi di x che verifichino l'uguaglianza $x^2 = 5$ oppure $x^2 = 3$ oppure $x^2 = 2$.

27. Risposta **E)** Chiaramente gli angoli con ampiezza superiore a 180° non possono essere più di uno. Relativamente ai nostri dati, le uniche due possibilità sono quella di un quadrilatero convesso e la prima a sinistra illustrata qui sotto (il quadrilatero convesso si può ottenere da questa per simmetria rispetto alla retta PR dei due lati PQ e QR): le altre tre figure infatti non rappresentano situazioni reali, in quanto la somma delle lunghezze dei due lati che concorrono nell'angolo interno concavo deve risultare strettamente inferiore alla somma delle lunghezze degli altri due. In ciascuna delle due possibilità considerate hanno ampiezza minore di 180° gli angoli P, R e S, e solo questi nella seconda.




28. Risposta **D)** È chiaro che la regione comune alle due figure è indipendente da quale figura si sovrappone all'altra. Si sa che l'area di tale regione può essere al massimo pari ai 2/3 dell'area del quadrato e quindi misurare al massimo $(2/3) \times 36 = 24$ cm$^2$. Questo valore corrisponde al 60% = 3/5 dell'area del triangolo, che quindi misurerà $(5/3) \times 24 = 40$ cm$^2$.

29. Risposta **D)** Osserviamo che 7 non divide né è diviso da numeri tra 1 e 10 diversi da 1 e quindi eventualmente dovrebbe stare ad un estremo; invece 9 può avere come adiacenti 1 o 3; 10 può avere come adiacenti 1, 2 o 5; 8 può avere come adiacenti 1, 2 e 4. Per rendere la catena la più lunga possibile, si deve utilizzare 1 come elemento di raccordo tra due gruppi di numeri che hanno come unico divisore comune 1 e quindi non può essere utilizzato per legare 7, che resterà quindi escluso dalla fila. Invece 9 3 6 2 10 5 1 4 8 è una possibile lista di 9 numeri che soddisfa le condizioni poste.

30. Risposta **B)** Sia A' il punto di BC tale che la lunghezza di A'B sia uguale quella di AB: la differenza delle lunghezze di BC e di AB è la lunghezza di CA'. Nel triangolo isoscele ABA' gli angoli alla base misurano (180 - 20)/2 = 80° e quindi, visto che l'angolo CAB misura 120°, il triangolo AA'C è isoscele con vertice in A'. Detta K l'intersezione della bisettrice dell'angolo CAB con il lato BC, l'angolo AKC misura 180 – 60 - 40 = 80° e quindi anche A'AK è isoscele, con vertice in A. Ne segue che i tre lati CA', A'A e AK hanno tutti la stessa lunghezza 2.