



Kangourou della Matematica 2009
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 11 maggio 2009

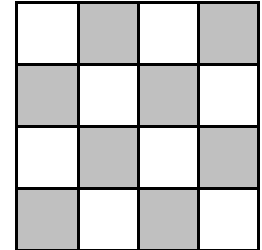


LIVELLO BENJAMIN

B1. (5 punti) Devi sistemare 4 monete identiche in altrettante caselle di una scacchiera 4×4 rispettando le regole seguenti:

- in nessuna riga e in nessuna colonna può esserci più di una moneta;
- se in una casella c'è una moneta, ogni casella che abbia in comune con essa qualche vertice non può contenere monete.

In quanti modi diversi puoi realizzare il progetto?



B2. (7 punti) Una ditta produce cioccolatini tutti dello stesso peso e li vuole vendere in confezioni da 36, 28, 24 o 16 pezzi. Su ogni confezione va apposta un'etichetta che riporta il peso netto del contenuto; sono state già preparate etichette indicanti 630 grammi e altre indicanti 360 grammi. Quali pesi dovranno indicare le etichette ancora da preparare?

B3. (11 punti) Ad una festiciola vi sono quattro pizze di forma circolare: una ha raggio 8 cm ed è tagliata in 3 fette uguali fra loro, una seconda ha raggio 10 cm ed è tagliata in 4 fette uguali fra loro, una terza ha raggio 12 cm ed è tagliata in 6 fette uguali fra loro, la quarta ha raggio 14 cm ed è tagliata in 8 fette uguali fra loro. Ti spetta una sola fetta e vuoi mangiare quanta più pizza possibile: da quale delle pizze ti conviene scegliere la fetta?

B4. (14 punti) Stamattina sono andato a trovare mio nonno che mi ha regalato una somma pari a 4 volte quella con cui ero uscito di casa. Poi ho incontrato Andrea che mi ha restituito i 3 euro che gli avevo prestato. Sentendomi ricco, ho condiviso in parti uguali con i miei 3 fratelli il contenuto del mio portafoglio. Infine mi sono comperato un libro pagandolo 9 euro. Dopo aver pagato, ho guardato nel portafoglio e ho trovato la stessa somma che avevo quando sono uscito di casa stamattina: a quanti euro ammonta?

B5. (18 punti) Quattro barche A , B , C , D possono attraversare un fiume da una sponda all'altra nei due sensi; il tempo impiegato da ogni barca non dipende dal senso. La barca A impiega 2 minuti per la traversata, la barca B ne impiega 4, la barca C ne impiega 8 e la barca D ne impiega 16. Le quattro barche si trovano ormeggiate insieme sulla sponda sinistra, devono essere tutte traggiate sulla sponda destra ed è disponibile un solo timoniere. Una barca può trascinarne al più un'altra, ma in questo caso il convoglio delle due barche impiega il tempo di traversata della barca più lenta fra le due. Una volta effettuata una traversata, il timoniere può ritornare al punto di partenza solo utilizzando una delle quattro barche. Trovate il tempo minore (in minuti) che consente di effettuare l'operazione, trascurando il tempo necessario ad agganciare e sganciare le barche e a trasbordare da una all'altra.

B6. (22 punti) In ogni mano del gioco della morra cinese ciascuno di due giocatori pronuncia contemporaneamente all'altro una delle tre parole *carta*, *forbici*, *sasso*: carta batte sasso, forbici batte carta e sasso batte forbici. Marco e Flora hanno giocato 10 mani nessuna delle quali è finita in pareggio (cioè le parole pronunciate in ogni singola mano sono sempre state diverse). Marco ha utilizzato 3 volte sasso, 6 volte forbici e 1 volta carta; Flora invece ha utilizzato 2 volte sasso, 4 volte forbici e 4 volte carta. Non sappiamo in quale ordine le parole sono state pronunciate. Chi ha vinto più mani e quante mani ha vinto?



Kangourou della Matematica 2009
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 11 maggio 2009

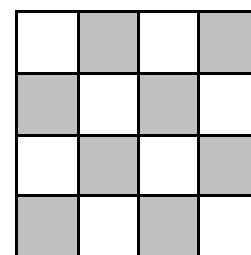


LIVELLO BENJAMIN

B1. (5 punti) Devi sistemare 4 monete identiche in altrettante caselle di una scacchiera 4×4 rispettando le regole seguenti:

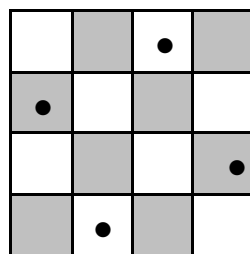
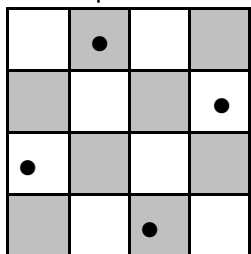
- in nessuna riga e in nessuna colonna può esserci più di una moneta;
- se in una casella c'è una moneta, ogni casella che abbia in comune con essa qualche vertice non può contenere monete.

In quanti modi diversi puoi realizzare il progetto?



Soluzione: 2

Non è difficile constatare che, in base alle nostre regole, ogni tentativo di piazzare le monete partendo da una qualunque delle 4 caselle centrali o delle 4 caselle d'angolo è destinato ad arenarsi (date le simmetrie, è sufficiente appurare questo fatto per una sola delle caselle centrali e una sola di quelle d'angolo). Rimangono dunque disponibili ad ospitare le monete solo le due caselle centrali della prima e quarta riga e le due caselle centrali della prima e quarta colonna, che consentono complessivamente le due sole disposizioni illustrate.



B2. (7 punti) Una ditta produce cioccolatini tutti dello stesso peso e li vuole vendere in confezioni da 36, 28, 24 o 16 pezzi. Su ogni confezione va apposta un'etichetta che riporta il peso netto del contenuto; sono state già preparate etichette indicanti 630 grammi e altre indicanti 360 grammi. Quali pesi dovranno indicare le etichette ancora da preparare?

Soluzione: 810, 540.

Le uniche taglie delle confezioni che stanno nel rapporto di 630 a 360, cioè di 7 a 4, sono nell'ordine 28 e 16; quindi 16 cioccolatini pesano 360 grammi e 4 ne pesano 90: ciò basta a risolvere il problema poiché tutte le confezioni contengono un numero di cioccolatini multiplo di 4.

B3. (11 punti) Ad una festiciola vi sono quattro pizze di forma circolare: una ha raggio 8 cm ed è tagliata in 3 fette uguali fra loro, una seconda ha raggio 10 cm ed è tagliata in 4 fette uguali fra loro, una terza ha raggio 12 cm ed è tagliata in 6 fette uguali fra loro, la quarta ha raggio 14 cm ed è tagliata in 8 fette uguali fra loro. Ti spetta una sola fetta e vuoi mangiare quanta più pizza possibile: da quale delle pizze ti conviene scegliere la fetta?

Soluzione: da quella di raggio 10.

Al variare del raggio, l'area del cerchio è proporzionale al quadrato del raggio (essendo p il fattore di proporzionalità). Si tratta allora di stabilire quale è il maggiore fra i seguenti quattro numeri: $8^2/3$, $10^2/4$, $12^2/6$, $14^2/8$. Facili confronti portano a scegliere $10^2/4 = 25$ (i rimanenti numeri infatti valgono meno di 22 il primo, 24 il terzo, 24,5 il quarto).

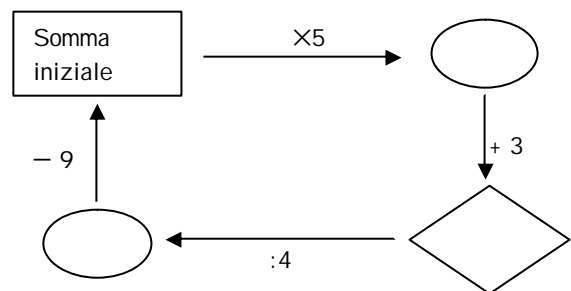
B4. (14 punti) Stamattina sono andato a trovare mio nonno che mi ha regalato una somma pari a 4 volte quella con cui ero uscito di casa. Poi ho incontrato Andrea che mi ha restituito i 3 euro che gli avevo prestato. Sentendomi ricco, ho condiviso in parti uguali con i miei 3 fratelli il contenuto del mio portafoglio. Infine mi sono comperato un libro pagandolo 9 euro. Dopo aver pagato, ho guardato nel portafoglio e ho trovato la stessa somma che avevo quando sono uscito di casa stamattina: a quanti euro ammonta?

Soluzione: 33 euro.

[Naturalmente il problema è facilmente descrivibile con un'equazione di primo grado: proponiamo qui una soluzione che non fa ricorso a tale strumento.]

La situazione è descritta dal diagramma a lato: partendo da una certa somma iniziale S , l'ho moltiplicata per 5, ho aggiunto 3, ho diviso per 4 ed infine ho tolto 9 e sono tornato alla somma iniziale.

Per risolvere il problema basta osservare che per poter tornare alla somma iniziale S , prima di comperare il libro dovevo possedere $S + 9$ euro e quindi prima di dividere la cifra con i miei fratelli dovevo avere quattro volte questa quantità, cioè $S + S + S + S + 36$ euro: d'altra parte a possedere questa cifra ero arrivato considerando 5 volte la somma iniziale S e aggiungendo 3, cioè $S + S + S + S + S + 3 = S + S + S + S + S + 3$. Se tolgo da entrambe le quantità 4 volte S e 3 ottengo che S vale 33.



B5. (18 punti) Quattro barche A, B, C, D possono attraversare un fiume da una sponda all'altra nei due sensi; il tempo impiegato da ogni barca non dipende dal senso. La barca A impiega 2 minuti per la traversata, la barca B ne impiega 4, la barca C ne impiega 8 e la barca D ne impiega 16. Le quattro barche si trovano ormeggiate insieme sulla sponda sinistra, devono essere tutte traghettate sulla sponda destra ed è disponibile un solo timoniere. Una barca può trascinarne al più un'altra, ma in questo caso il convoglio delle due barche impiega il tempo di traversata della barca più lenta fra le due. Una volta effettuata una traversata, il timoniere può ritornare al punto di partenza solo utilizzando una delle quattro barche. Trovate il tempo minore (in minuti) che consente di effettuare l'operazione, trascurando il tempo necessario ad agganciare e sganciare le barche e a trasbordare da una all'altra.

Soluzione: 30 minuti.

Volendo minimizzare il tempo, è chiaro che conviene che le due barche più lente viaggino insieme e nessuna delle due venga utilizzata per i rientri del timoniere. Si può quindi operare come segue.

- Primo viaggio: andata $A + B$, ritorno A ; tempo impiegato: $4 + 2$ minuti.
- Secondo viaggio: andata $C + D$, ritorno B ; tempo impiegato: $16 + 4$ minuti.
- Terzo viaggio: andata $A + B$; tempo impiegato: 4 minuti.

Una volta appurato il fatto che conviene abbinare C con D , è facile vedere che non esiste soluzione migliore di quella proposta.

B6. (22 punti) In ogni mano del gioco della morra cinese ciascuno di due giocatori pronuncia contemporaneamente all'altro una delle tre parole *carta, forbici, sasso*: carta batte sasso, forbici batte carta e sasso batte forbici. Marco e Flora hanno giocato 10 mani nessuna delle quali è finita in pareggio (cioè le parole pronunciate in ogni singola mano sono sempre state diverse). Marco ha utilizzato 3 volte sasso, 6 volte forbici e 1 volta carta; Flora invece ha utilizzato 2 volte sasso, 4 volte forbici e 4 volte carta. Non sappiamo in quale ordine le parole sono state pronunciate. Chi ha vinto più mani e quante mani ha vinto?

Soluzione: Marco, vincendo 7 mani su 10.

Poiché nessuna mano è finita in pareggio, nelle sei mani in cui Marco ha pronunciato forbici Flora deve avere risposto due volte con sasso e 4 volte con carta: complessivamente Marco ha allora perso due di quelle mani, vincendone 4. Allora nelle altre quattro mani, quando Flora ha pronunciato forbici, Marco deve avere risposto tre volte con sasso e una volta con carta: complessivamente di queste quattro mani Marco ne ha allora vinte tre, perdendone una.